ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 05/03/2024

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

T1		T2		P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1) Indique si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Si es verdadera proporcione una demostración, caso contrario exhiba un contraejemplo.

a. La circulación del campo $\vec{f}:R^2 \to R^2$ tal que $\vec{f}(x,y) = (y^2 - g(y-x)\,, y^2 + g(y-x))$ con $g \in C^1(R)$ a lo largo de la curva frontera de la región plana D definida por $D:\begin{cases} x \geq y^2 \\ x \leq 2 - y^2 \end{cases}$, recorrida en sentido negativo, es igual a $3\sqrt{2}$.

b. Se sabe que la ecuación $2z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-12, 12\sqrt{3}, 24\sqrt{3})$ define de forma implícita a una función $z = f(x,y)$ de clase $C^\infty(R^2)$ en un cierto entorno V de $(x_0, y_0) = (-12, 12\sqrt{3})$. Si la matriz Hessiana de f es $Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, entonces f alcanza un valor extremo local en (x_0, y_0).

T2) **a**. Demuestre que si $\emptyset: S \subseteq R^3 \to R$ es un campo escalar de clase $C^1(S)$, entonces $\int_C \overrightarrow{\nabla\emptyset}.d\vec{s} = \emptyset(Q) - \emptyset(P)$ siendo $C \subset S$ una curva regular a trozos que une los puntos $P, Q \in S$.

b. Analice si la función definida por. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ admite plano tangente en el origen. Fundamente claramente la respuesta.

P1) Calcule el área del trozo de superficie de ecuación $z = \sqrt{x^2+y^2}\ \ con\ \ x^2 + y^2 \leq 4y$.

P2) Determine las líneas del campo definido por $\vec{F}(x,y) = (x - y\,, x + y)$ y luego obtenga aquella que pasa por el punto (1,-1).

P3) Plantee la integral para el cálculo del flujo del gradiente del campo escalar $\varphi(x,y,z) = 2x^2 - 4yz^2$a través de la superficie frontera del cuerpo W definido por $W:\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + z \leq 2 \\ x \geq 0\,,\ \ y \geq 0\,, z \geq 0 \end{cases}$. Indique la orientación escogida para la superficie. NO es necesario que calcule la integral planteada.

P4) Calcule la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (yz + g(x)\,, xz + g(y),\ y^2 + g(z))$ con $\vec{F} \in C^1(R^3)$ a lo largo de la curva C dada como intersección de las superficies $y + x^2 + z^2 = 0$ e $y = -1$. Indique gráficamente la orientación que ha escogido para la curva C.

(resuelto por Sylvina)

AM 2 UTN BA — Final — HOJA N° 1 — FECHA 5-3-24

T1 V o F.

a) La circulación del campo $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)$
$\bar{f}(x,y) = \left(y^2 - g(y-x),\, y^2 + g(y-x)\right)$ con $g \in C^1(\mathbb{R})$ a lo largo de la curva frontera de la región plana D definida por D: $\begin{cases} x \geq y^2 \\ x \leq 2 - y^2 \end{cases}$ recorrida en sentido negativo, es igual a $3\sqrt{2}$

D es una región compacta de $\mathbb{R}^2$

$C = \partial D$ es una curva cerrada y suave a trozos

$\bar{F} \in C^1$ pues sus componentes son polinomios más una función $g \in C^1$

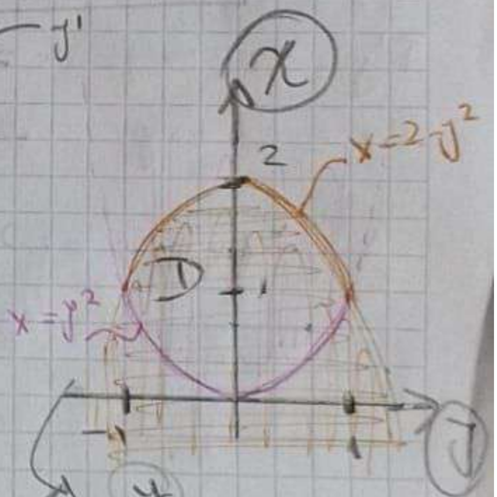
Se cumplen las hip. T. Green $\therefore$ $\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\,dy$ $\quad \bar{F} = (P, Q)$

x enunciado: $\oint_{C^-} \bar{F}\, d\bar{l} = 3\sqrt{2}$ ⟸ es lo que se quiere probar

$\Longrightarrow \boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = -3\sqrt{2}}$

$P = y^2 - g(y-x) \to P'_y = 2y - g'(y-x) \cdot 1$ ⟸ y'

$Q = y^2 + g(y-x) \to Q'_x = g'(y-x) \cdot (-1)$ → x'

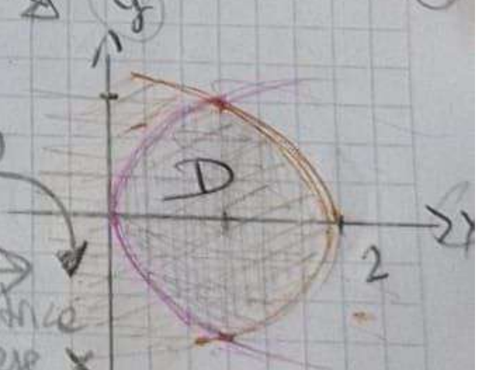


Región D: $x \geq y^2 \qquad x \leq 2 - y^2$

$\oint_{C^-} \bar{F}\, d\bar{l} = -\iint_D Q'_x - P'_y \, dx\,dy =$

$= -\iint_D \cancel{-g'(y-x)} - 2y + \cancel{g'(y-x)}\, dx\,dy =$

$= -\iint_D -2y \, dx\,dy = 2\iint_D y \, dx\,dy = 0$



$\boxed{\oint_{C^-} \bar{F}\, d\bar{l} = 0 \neq 3\sqrt{2}}$

la región es simétrica con respecto al eje x

$\therefore \iint_D y \, dx\,dy = 0$

F

(resuelto por Sylvina)

T1 b) Se sabe que la ecuación $2z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-12, 12\sqrt{3}, 24\sqrt{3})$, define de forma implícita, a una función $z = f(x, y)$ $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ en cierto entorno V de $(x_0, y_0) = (-12, 12\sqrt{3})$

Si la matriz hessiana de f es $Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, entonces

f alcanza un valor extremo local en (x_0, y_0).

Hallo $\nabla f_{(x,y)}$ - TFI: $F_{(xyz)} = 2z^2 + xyz - xy^2 - x^3$

la ec. del enunciado es la sup. de nivel 0 de F

$$f'_{x}(-12, 12\sqrt{3}) = -\frac{F'_x(-12, 12\sqrt{3}, 24\sqrt{3})}{F'_z(-12, 12\sqrt{3}, 24\sqrt{3})}$$

y

$$f'_{y}(-12, 12\sqrt{3}) = -\frac{F'_y(-12, 12\sqrt{3}, 24\sqrt{3})}{F'_z(-12, 12\sqrt{3}, 24\sqrt{3})}$$

$F'_x = yz - y^2 - 3x^2 \rightarrow F'_x(-12, 12\sqrt{3}, 24\sqrt{3}) = 0$

$F'_y = xz - 2xy \rightarrow F'_y(-12, 12\sqrt{3}, 24\sqrt{3}) = 0$

$F'_z = 4z + xy \rightarrow F'_z(-12, 12\sqrt{3}, 24\sqrt{3}) = -83{,}14$

$\Big\}\ f'_x = f'_y = 0$, $\nabla f_{(-12, 12\sqrt{3})} = \bar{0}$

$\nabla f_{(-12, 12\sqrt{3})} = (0, 0) \Rightarrow (-12, 12\sqrt{3})$ es punto crítico

Por enunciado: $Hf_{(-12, 12\sqrt{3})} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{|H| = \frac{3}{4} > 0}$

(x_0, y_0) es extremo

como $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow$ el extr. es mínimo

V

$\boxed{(x_0, y_0) = (-12, 12\sqrt{3}) \text{ es un punto en donde f alcanza un mínimo local}}$

(resuelto por Sylvina)

AM2 UTN BA	Final	HOJA N° 2 FECHA 5-3-24

2) a) Demuestre que si $\phi: S \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase $C^1(S)$ entonces:

$$\int_C \vec{\nabla}\phi \, d\vec{s} = \phi(Q) - \phi(P)$$

siendo $C \subset S$ una curva regular a trozos que une los puntos P y $Q \in S$

$$\int_C \vec{\nabla}\phi \, d\vec{s} = \int_Q^P \vec{\nabla}\phi \, d\vec{s} = \phi \Big|_Q^P = \phi(P) - \phi(Q)$$

b) Analice si la función definida por $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & si (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si (x,y) = (0,0) \end{cases}$ admite plano tangente en el origen. Fundamentar

Para que una función admita plano tangente, f debe ser diferenciable.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h(a,b))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

$\vec{v} = (a,b)$, $a^2+b^2 = 1$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{h}a|hb|}{\sqrt{(ha)^2+(hb)^2}} = \lim_{h \to 0} \frac{a|h||b|}{\sqrt{h^2\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a\cancel{|h|}|b|}{\cancel{|h|}} = a|b|$$

$\hookrightarrow$ No es diferenciable

$\boxed{f \text{ NO admite plano tangente en } (0,0,f(0,0))}$

Si f fuese diferenciable $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0)\, \vec{v} = (f'_x(0,0), f'_y(0,0))\,(a,b)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = a f'_x(0,0) + b f'_y(0,0)$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = a|b|$ no puedo llegar a determinarlo de una combinación lineal del gradiente por el versor $\vec{v}$

(resuelto por Sylvina)

P1 Calcule el área del trozo de sup. de ec. $\overbrace{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{S}$ con $x^2+y^2 \le 4y$

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \text{semicono positivo} \\ x^2+y^2 \le 4y \rightarrow \underbrace{\text{restricción}}_{} \end{cases}$$

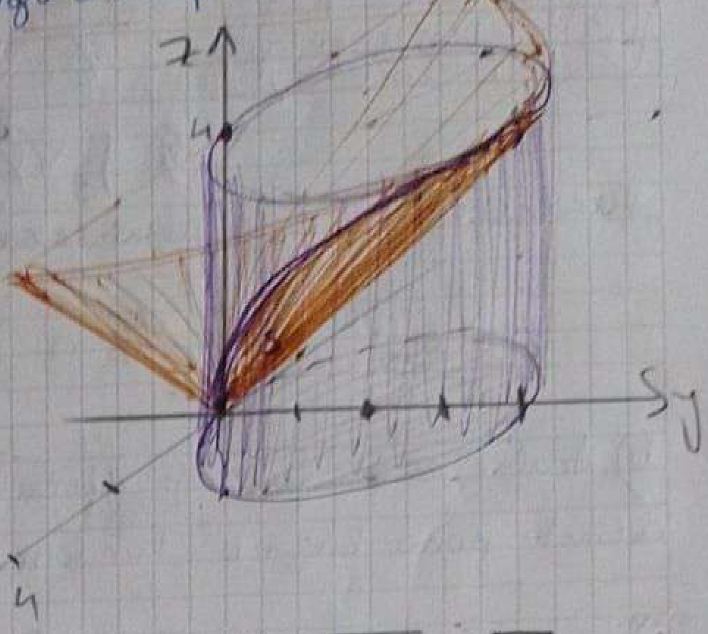
círculo $r=2$

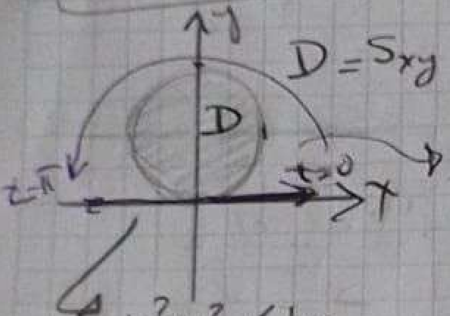
centro $(0,2)$

$$x^2+y^2-4y \le 0$$

$$x^2+y^2-4y+4-4 \le 0$$

$$\boxed{x^2+(y-2)^2 \le 4}$$





$$x^2+y^2 \le 4y$$

$$r^2 \le 4r\,\text{sen}(t)$$

$$\boxed{0 \le r \le 4\,\text{sen}(t)} \qquad \boxed{0 \le t \le \pi}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = r \end{cases} \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = r$$

$$\sigma(r,t) = (r\cos(t),\ r\,\text{sen}(t),\ r)$$

$$\sigma'_r = (\cos(t),\ \text{sen}(t),\ 1)$$

$$\sigma'_t = (-r\,\text{sen}(t),\ r\cos(t),\ 0)$$

$$N = (r\cos(t),\ r\,\text{sen}(t),\ -r)$$

$$\|N\| = \sqrt{r^2\cos^2 + r^2\,\text{sen}^2 + r^2}$$

$$\|N\| = \sqrt{2}\,r$$

$$A_S = \iint_S dS = \iint_{D^*} \|N_S\|\,dr\,dt =$$

$$= \iint_{D^*} r\sqrt{2}\,dr\,dt = \sqrt{2}\boxed{\iint_{D^*} r\,dr\,dt}$$

área de D $= \pi \cdot r^2 = 4\pi$

$$\boxed{A_S = 4\sqrt{2}\,\pi}$$

(resuelto por Sylvina)

AM2 UTN BA | Final | HOJA Nº 3 | FECHA 5-3-24

(P2) Determine las líneas de campo definido por $\bar{F}(x,y) = (x-y, x+y)$ y luego obtenga aquella que pasa por el punto $(1,-1)$

Las líneas de campo son aquellas curvas en la que su vector tangente en cada punto es igual al campo evaluado en dicho punto

$$C: \bar{\gamma}(t) \text{ es l.c} \longrightarrow \bar{F}(\bar{\gamma}(t)) = \bar{\gamma}'(t) \rightarrow \frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y}$$

$$(x+y)\,dx = (x-y)\,dy \rightarrow (x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0$$

$$\underbrace{(x+y)}_{P}\,dx + \underbrace{(y-x)}_{Q}\,dy = 0$$

$$P'_y \neq Q'_x$$

hallo factor integrante

$$h(x)(x+y)\,dx + h(x)(y-x)\,dy = 0$$

$$\underbrace{[x\,h(x) + y\,h(x)]}_{\tilde{P}}\,dx + \underbrace{[y\,h(x) - x\,h(x)]}_{\tilde{Q}}\,dy = 0$$

Busco que $\tilde{P}'_y = \tilde{Q}'_x$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{P}'_y = y'\,h(x) \\ \tilde{Q}'_x = y\,h'(x) - h(x) - x\,h'(x) \end{array}\right\} y'\,h(x) = y\,h'(x) - h(x) - x\,h'(x)$$

queda: $y'\,h(x) + h(x) = y\,h'(x) - x\,h'(x)$

$$\underbrace{h(x)\,(y'+1) = h'(x)\,(y-x)}$$

$h(x)$, y, y' son funciones que dependen de x

Además está x.

No sé cómo seguirlo.

Resuelto por $\boxed{\text{Mathway}}$.com

$$\boxed{\ln\left(x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C}$$

(resuelto por Sylvina)

P3 Plantee la integral para el cálculo del flujo del grad. del campo escalar $\varphi(x,y,z) = 2x^2 - 4yz^2$ a través de la sup. frontera de

$$W: \begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + z \leq 2 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$$

Indicar orientación elegida.

No es necesario calcular la integral

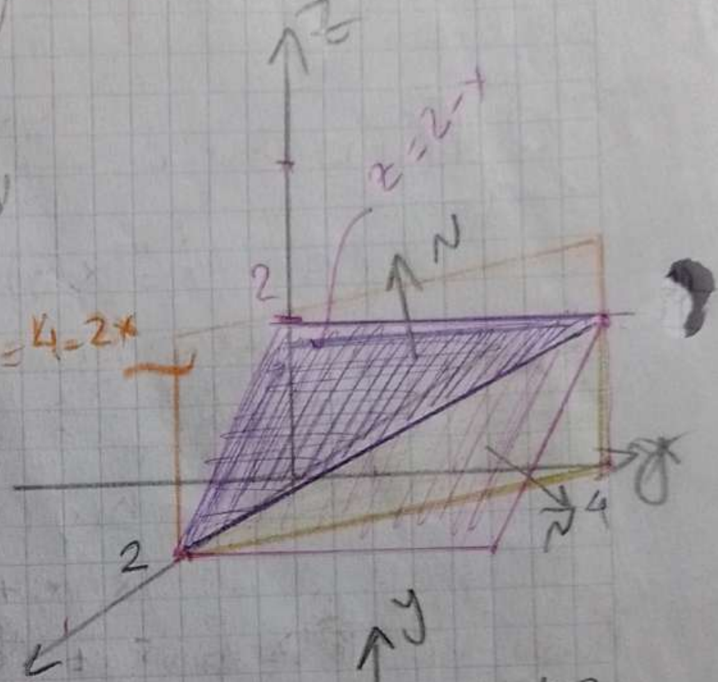
$S = \partial W$

$$\nabla\varphi = \bar{F} = (4x, -4z^2, -8yz)$$

Se cumplen las hip. T-Gauss

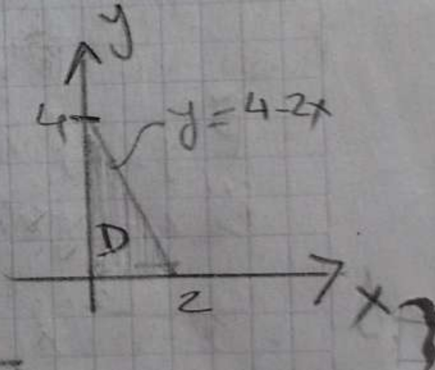
$$\therefore \iint_S \bar{F}\, d\bar{S} = \iiint_W \operatorname{div}\bar{F}\, dV$$

$$\boxed{\operatorname{div}(\bar{F}) = 4 - 8y}$$



$$\begin{cases} \boxed{2x + y \leq 4} \\ \boxed{x + z \leq 2} \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \rightarrow 1^\circ \text{oct.} \end{cases}$$

$D = W_{xy}$



$$\boxed{\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2 \\ 0 &\leq y \leq 4 - 2x \\ 0 &\leq z \leq 2 - x \end{aligned}}$$

$$\boxed{\iint_{\partial W} \bar{F}\, d\bar{S} = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{2-x} 4 - 8y \; dz\, dy\, dx}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

AM2 UTN BA | Final | HOJA N° 4 FECHA 5-3-24

(P4) Calcule la circulación del campo vectorial $\vec{F}$

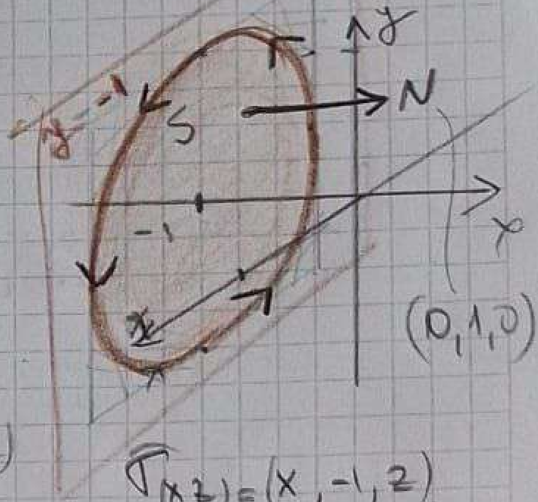
$$\bar{F}(x,y,z) = (yz + g(x),\ xz + g(y),\ y^2 + g(z))$$

con $\bar{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ a lo largo de la curva C dada como intersección de las superficies $y + x^2 + z^2 = 0$ e $y = -1$

Indique gráficamente la orientación que ha escogido para la curva C

$$C: \begin{cases} y + x^2 + z^2 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow -1 + x^2 + z^2 = 0$$

$$C: \begin{cases} \boxed{x^2 + z^2 = 1} \\ y = -1 \end{cases}$$



C es una curva cerrada y suave

$C = \partial S$, S sup orientada

$\bar{F} \in C^1$ (x enunciado) $\quad \bar{F} = (P, Q, R)$

$\bar{\sigma}(x,z) = (x, -1, z)$

Se cumplen las hip. T. Stokes ∴

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar{F})\, d\bar{S} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar{F})\, \check{n}\, dS$$

$$\operatorname{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) =$$
$$= (2y - x,\ y,\ z - z) = \operatorname{rot}(\bar{F})$$

$y=-1$

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar{F})(\bar{\sigma}(x,z)) \cdot \check{n}\, dS = \iint_S (-2 - x, -1, 0)(0,1,0)\, dS =$$

$$= \iint_S -1\, dS = -\underbrace{\iint_S dS}_{\text{Área}_S} = -\pi \cdot 1^2 = -\pi$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = -\pi}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)